# שיטות סטטיסטיות למידע רב

## פרק 2 - הסתברות- תכונות  של פונקציית יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

# תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

## רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:
  $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$.
- אם $X$ ו- $Y$ משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:
  $M_{X+Y}(t)=E(e^{tx})\cdot E(e^{ty})=M_X(t)\cdot M_Y(t)$.

## תזכורת:

| פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(t)$ | פונקציית צפיפות $f_X(t)$ | התפלגות |
|---|---|---|
| $f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$ | $f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$ | אחיד $U(a,b)$ |
| $f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$ | $f_x(t)=\{\lambda e^{-\lambda t} \quad t\ge 0$ | מעריכי $\exp(\lambda)$ |
| $\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ | $f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$ |

| התפלגות | $E(X)$ | $VAR(X)$ | $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|
| אחיד $U(a,b)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$ |
| מעריכי $\exp(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ |
| נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |

| משתנה מקרי | משמעות | $P_X(x)$ | $E(x)$ | $Var(x)$ | $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| בינומי $Bin(n,p)$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים: $P$ ההסתברות להצלחה $1-P=q$ ההסתברות לכישלון $x$ : מספר ההצלחות | $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,...,n$ | $n\cdot p$ | $n\cdot p\cdot q$ | $\left[pe^t+q\right]^n$ |
| גיאומטרי $G(p)$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. $x$ : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה | $pq^{x-1}$ $x=1,2,...,\infty$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{pe^t}{1-qe^t}$ |
| פואסוני $Pois(\lambda)$ | $x$ : מספר ההופעות בילידת זמן. מ״מ המקבל ערכים $0,1,...,\infty$ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(e^t-1)}$ |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim P(\lambda=4)$ $Y\sim P(\lambda=2)$.

$X$ ו- $Y$ הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X-3$?

ב. נגדיר את: $T=X+Y$. מה ההתפלגות של $T$?

# שאלות:

**1)** נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\cdot\lambda)$.

**2)** נתון: $X \sim P(\lambda=10)$ , $Y \sim P(\lambda=2)$.

$X$ ו- $Y$ הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X+Y$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של $T$.

ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda=12)$.

ג. הוכיחו ש- $X/T=8 \sim B\left(8,\frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של $X$,

בהינתן ש- $T=8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n=8$ ו- $p=\frac{5}{6}$.

**3)** יהי: $X_i \sim \exp(1)$ , $i=1,2...n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.

נגדיר את $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של $T$.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של $T$.

ג. יהי: $Z=\frac{T-E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של $T$.

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של $Z$.

**4)** נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

הנוסחה הבאה: $M_X(T)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ לכל $t$, כאשר: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

א. הוכיחו שאם $Y=2X$ אזי $Y \sim N(2\mu,4\sigma^2)$.

ב. הוכיחו שאם $T=X_1+X_2$ ו- $X_1$ ו- $X_2$ בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu,2\sigma^2)$.

## תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)\cdot\left(e^t-1\right)}$. ב. שאלת הוכחה.

2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12\left(e^t-1\right)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: $n$, שונות: $n$.

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-\left(n^{-\frac{1}{2}}t\right)}\right)^n\cdot e^{-n^{\frac{1}{2}}\cdot t}$.

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.